შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

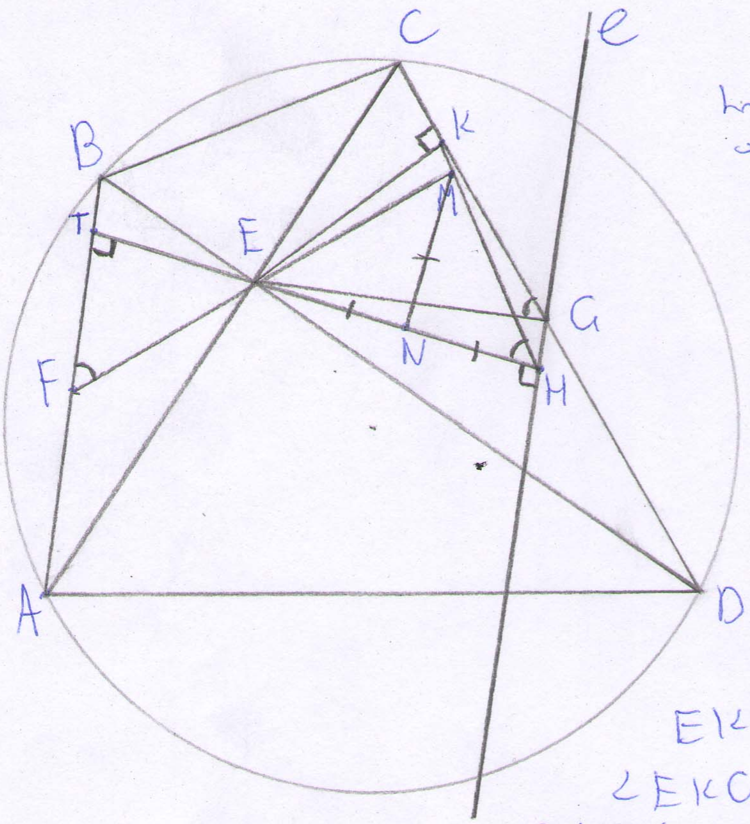
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

21.04.2012/ მათ/ I/ 005

ამოცანა № 1

გვერდი № 1



ABCD ოთხკუთხედი ჩახაზულია => $\angle BAC=\angle BDC$ და $\angle ABD=\angle ACD$ ანუ $\triangle ABE \sim \triangle DCE$.

EF და EG შესაბამისად ABE და DCE მსგავს სამკუთხედებში, შესაბამისი E წვეროდან გავლებული მედიანებია, ამიტომ ანალოგიური 2 სამკუთხედის მსგავსების გამო ეს შესაბამისი მედიანები მოპირდაპირე გვერდებთან (შესაბამისი წვეროს მხარეს) ტოლ კუთხეებს ქმნიან. ანუ:

$\cancel{\angle BEF}\ \angle BFE=\angle CGE$ (1).

EKGH ოთხკუთხედში:

$\angle EKG+\angle EHG=90°+90°=180°$, ანუ EKGH ოთხკუთხედი ჩახაზულია. მაშინ:

$\angle EGK=\angle EHK$, მაშინ (1)-ის ძალით ასევე გვაქვს, რომ:

$\angle EFB=\angle EHM$. (2).

ვთქვათ HE სხივი AB წრფეს კვეთს T წერტილში (აუცილებლად გადაკვეთს, რადგან $AB \parallel \ell$) მაშინ, რადგანაც:

$EH \perp \ell$ და $\ell \parallel AB \Rightarrow AB \perp EH \Rightarrow \angle FTE=90°$. (3).

მაშინ FTMH ოთხკუთხედში: $\angle TFM=\angle THM \Rightarrow$ FTMH ჩახაზულია $\Rightarrow \angle FTE=\angle EMH=90°$. მაშინ რადგანაც EMH სამკუთხედი მართკუთხაა, => მისი M წვეროდან ~~[illegible]~~ გავლებული მედიანა ჰიპოტენუზის ნახევრის ტოლია, ანუ:

$EH=2\cdot MN$.

რ.დ.გ.

ამოცანა № 2

გვერდი № 1

~~დავყოთ~~ განვიხილოთ ის 2012 რიცხვი 1-დან 2012-მდე და დავყოთ ისინი 3 A, B და C ჯგუფად შემდეგნაირად:

$A = \{1, 4, 7, 10, \ldots, 2011\}$ — $3k+1$-სახის რიცხვები.

$B = \{2, 5, 8, 11, \ldots, 2012\}$ — $3k+2$ სახის რიცხვები.

$C = \{3, 6, 9, 12, \ldots, 2010\}$ — $3k$ სახის რიცხვები.

A და B ჯგუფებში 671-671 რიცხვია, C-ში კი 670 რიცხვია.

შევამჩნიოთ ის, რომ a და b რიცხვები იცვლებიან ადგილებს მაშინ, თუ ისინი სხვადასხვა ჯგუფებში არიან, ხოლო თუ ერთ ჯგუფში არიან არ იცვლებიან.

მაშინ A და B ჯგუფებში შეიძლება რიცხვის დაყენება 1341 ადგილზე, ხოლო C-ჯგუფში შეიძლება კი 1342 ადგილზე, ანუ ალბათ 1341 ადგილზე მაინც დაყენდება.

ნებისმიერი ორიდან, რომელიც 2 რიცხვი ერთ ჯგუფში იქნება [illegible], და ის ორი რიცხვი არ იქნება [illegible] ადგილზე.

შესაბამისად რიცხვები 2012 ჯერ [illegible] ადგილზე, რომ ალბათ ყველა დაიკავებს 1341 ადგილზე და ნებისმიერ ორიდან რიცხვები 2 რიცხვი, რომლებიც ადგილს არ იცვლიან. ასე კი დასრულდება ამოცანის დამტკიცება.

რ. დ. გ.

5

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

21.04.2012/ მათ/ I/ 005

ამოცანა № 3

გვერდი № 1

$a-b=a^n\cdot c-b^n\cdot d$. $a,b,c,d\in \mathbb{Z}$. $n\in\mathbb{N}$. $|c-d|=1$.

ა) განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $c=d+1$. მაშინ გვაქვს:

$a-b=a^n\cdot(d+1)-b^n\cdot d \Rightarrow \underline{a-b=(a^n-b^n)\cdot d+a^n}$. (1)

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}\cdot b+\dots+a\cdot b^{n-2}+b^{n-1}) \vdots a-b \Rightarrow$

(1)-ტოლობიდან: $a^n \vdots (a-b)$. მაშინ, რადგანაც $(a^n-b^n)\vdots(a-b) \Rightarrow$

$\Rightarrow b^n \vdots (a-b)$. ანუ გვაქვს:

$$\begin{cases} a^n \vdots (a-b) \\ b^n \vdots (a-b) \end{cases}$$

ვთქვათ $(a-b)=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\dots\cdot p_k^{\alpha_k}$ (კანონიკური სახით).

შევნიშნოთ, რომ: თუ $(a-b)\vdots p \Rightarrow a^n \vdots p$ და $b^n \vdots p$, სადაც p-მარტივია $\Rightarrow a\vdots p$ და $b\vdots p$. ანუ:

$a \vdots p_1\cdot p_2\cdot\dots\cdot p_k$ და $b \vdots p_1\cdot p_2\cdot\dots\cdot p_k$, მაშინ:

$a^n \vdots (p_1\cdot p_2\cdot\dots\cdot p_k)^n$ და $b^n \vdots (p_1\cdot p_2\cdot\dots\cdot p_k)^n$.

თუმცა (1)-დან ვიცით, რომ: $a-b=(a^n-b^n)d+a^n \vdots (p_1 p_2\cdots p_k)^n \Rightarrow$

$\Rightarrow a-b=(p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\dots\cdot p_k^{\alpha_k}) \vdots p_1^n\cdot p_2^n\cdot\dots\cdot p_k^n \Rightarrow \alpha_i \vdots n$. $i\in\overline{1,k}$

მაშასადამე $|a-b|$ არის რომელიღაც მთელი, დადებითი რიცხვის n-ური ხარისხი $\Rightarrow \sqrt[n]{|a-b|}\in\mathbb{Z}$.

ბ) როცა $d=c+1$:

$a-b=a^n\cdot c-b^n(c+1)=c(a^n-b^n)-b^n$, $(a^n-b^n)\vdots(a-b)\Rightarrow$

$\Rightarrow b^n \vdots (a-b)$. რადგანაც $(a^n-b^n)\vdots(a-b) \Rightarrow a^n \vdots (a-b) \Rightarrow$ გვაქვს:

$\begin{cases} a^n \vdots (a-b) \\ b^n \vdots (a-b) \end{cases} \rightarrow$ აქედან კი წინა შემთხვევის ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ, რომ $\sqrt[n]{|a-b|}\in\mathbb{Z}$.

მაშასადამე ორივე შემთხვევისთვის დავამტკიცეთ, რომ ~~a-b~~ $\sqrt[n]{|a-b|}$ - მთელი რიცხვია, ამიტომაც ამოცანა დამტკიცებულია.

რ.დ.გ.